7 MÁQUINAS. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Sugerencias Didácticas

- En esta primera Unidad del Bloque se establece una serie de principios generales que rigen el funcionamiento de las máquinas, consideradas como dispositivos que transforman en trabajo útil parte de la energía que se les comunica. Como, además, interesa que este trabajo lo realicen en el mínimo tiempo posible, el concepto de potencia juega un papel fundamental al analizar el comportamiento de las máquinas.
- El profesor debe profundizar en los conceptos de estas tres magnitudes: trabajo, potencia y energía, insistiendo especialmente en sus fórmulas de definición y unidades correspondientes.
- Es necesario considerar las distintas formas en que se manifiesta la energía, así como la posibilidad de conversión de unas en otras, regida por el correspondiente principio de conservación. Se debe hacer hincapié en el calor como forma más degradada de la energía, así como en el hecho de que no existe en los cuerpos, sino que se manifiesta en los intercambios energéticos.
- La Humanidad obtiene energía a partir de distintas fuentes, renovables o no renovables, aunque prácticamente todas ellas proceden en última instancia del Sol. El alumnado ha de concienciarse del progresivo agotamiento de estas fuentes y de la conveniencia –o mejor, necesidad– de no malgastar energía, no sólo para asegurar su abastecimiento para futuras generaciones, sino también para disminuir los problemas ambientales derivados de su consumo masivo.
- A lo largo de esta Unidad se propondrán al alumnado ejercicios sencillos que supongan cálculos de trabajo, potencia y energía. Algunos de ellos, que pueden servir de pauta al profesorado, se incluyen en la parte expositiva del texto, y otros en las Actividades de Síntesis, al final de la Unidad. Es necesario extremar el rigor científico en su resolución, utilizando preferiblemente el Sistema Internacional, y justificando adecuadamente los cálculos realizados. Un problema no supone sólo la aplicación de una fórmula; ésta, al fin y al cabo, no es otra cosa más que una relación entre cantidades correspondientes a distintas magnitudes. El alumno ha de ser capaz de decidir en cada caso qué magnitudes son las que intervienen en el fenómeno al que se refiere el problema propuesto y justificar razonadamente las fórmulas que debe utilizar.

SOLUCIONES a las Actividades propuestas

Pág. 123

1. Es una actividad de respuesta muy variada por parte del alumnado.

2. Es necesario tener en cuenta que las máquinas son capaces de realizar un trabajo útil, mientras que los mecanismos son los dispositivos materiales que proporcionan los movimientos precisos de las piezas de una máquina.

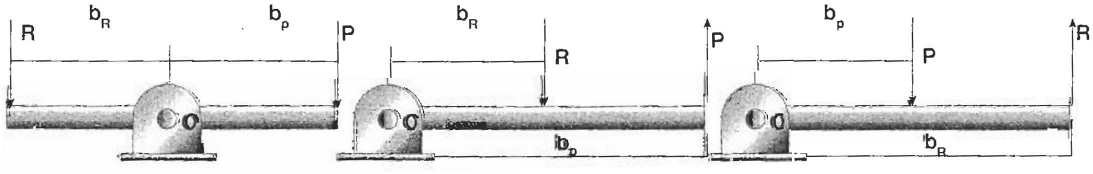
3. Para la realización de este trabajo, el alumnado ha de tener presentes los siguientes aspectos:

- Los esquemas correspondientes a los tres géneros de palancas aparecen recogidos en la figura:
- En todas las palancas se cumple –siempre que no exista rozamiento– *que la potencia por su brazo es igual a la resistencia por el suyo*.
- La capacidad de una palanca para transformar fuerzas viene definida por el *desarrollo mecánico* o *rendimiento*, *M*, que es la relación existente entre la fuerza de salida o *resistencia R*, es decir, la fuerza que es capaz de desarrollar la máquina, y la fuerza de entrada o *potencia P*, o sea la fuerza aplicada a la misma.

De esta manera se puede escribir:

$$\boxed{M = \frac{R}{P}}$$

Si el desarrollo mecánico es menor que 1, la máquina reduce la fuerza aplicada, y si es mayor que 1, la aumenta.



Palanca de 1.^{er} género

Palanca de 2.º género

Palanca de 3.^{er} género

Pág. 128

1. El trabajo valdrá:

$$W = \Delta E_{pg} = m \cdot g \cdot h = 65\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 \cdot 10\,\text{m} = \boxed{6\,370\ \text{J}}$$

El trabajo realizado siempre es el mismo, tanto si sube por una escalera vertical como si lo hace por la inclinada; lo que sucede es que al subir por la inclinada el esfuerzo realizado es menor.

2. El trabajo será:

$$W = I^2 \cdot R \cdot t = (2A)^2 \cdot 25\,\Omega \cdot 1\,800\,s = \boxed{1{,}8 \cdot 10^5\ \text{J}}$$

3. Como $W = n \cdot R \cdot T \cdot ln(V_2/V_1)$ teniendo en cuenta que:

$W = 0{,}5\,\text{kWh} = 1{,}8 \cdot 10^6\ \text{J}$ y $V_2/V_1 = 3$, resulta:

$$n = \frac{W}{R \cdot T \cdot ln\frac{V_2}{V_1}} = \frac{1{,}8 \cdot 10^6\ \text{J}}{8{,}3144\,\frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 300\,\text{K} \cdot ln\,3} = \boxed{656{,}9\ \text{moles}}$$

Pág. 131

1. No, puesto que para definir la potencia hemos de conocer también el tiempo empleado en realizar el trabajo. Al no conocer el tiempo que emplea cada motor en realizar su trabajo respectivo, no podemos deducir su potencia.

2. Como 90 km/h = 25 m/s, la potencia valdrá:

$$P = F \cdot v = 1\,200\,\text{N} \cdot 25\,\text{m/s} = \boxed{30\,000\ \text{W}}$$

3. Suponiendo que el rendimiento sea del 100 %:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}$$

Como: $P = \frac{1}{5}\,\text{CV} \cdot \frac{735\,\text{W}}{1\,\text{CV}} = 147\,\text{W}$, resulta:

$$m = \frac{P \cdot t}{g \cdot h} = \frac{147\,\text{W} \cdot 2\,\text{s}}{9{,}8\,\text{m/s}^2 \cdot 10\,\text{m}} = \boxed{3\ \text{kg}}$$

Pág. 138

1. En ambos casos el trabajo realizado es el mismo, por ser iguales los valores de la fuerza y del desplazamiento. Por lo tanto, aplicando el teorema de las fuerzas vivas, se deduce que los dos cuerpos –el grano de arena y el barco– experimentan el mismo aumento de energía cinética.

2. El momento de inercia del cilindro es:

$$I = \frac{1}{2} M \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,\text{kg} \cdot (0{,}1\,\text{m})^2 = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

y su velocidad de rotación:

$$\omega = 600\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi\,\text{rad}}{1\,\text{rev}} \cdot \frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}} = 20\pi\,\text{rad/s}$$

Por lo tanto, su energía cinética será:

$$E_C = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (20\pi\,\text{rad/s})^2 = \boxed{9{,}87\ \text{J}}$$

3. a) Respecto al techo, las energías potenciales de ambas pesas son:

$$E_{pg1} = m_1 \cdot g \cdot h_1 = 7\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 \cdot (-2\,\text{m}) = -137{,}2\ \text{J}$$

$$E_{pg2} = m_2 \cdot g \cdot h_2 = 40\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 \cdot (-8\,\text{m}) = -3\,136\ \text{J}$$

Como $E_{p_{g1}} > E_{p_{g2}}$,

la primera pesa tiene mayor energía potencial gravitatoria

b) Respecto al suelo:

$$E'_{pg1} = m_1 \cdot g \cdot h_1 = 7\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 \cdot 10\,\text{m} = 686\ \text{J}$$

$$E'_{pg2} = m_2 \cdot g \cdot h_2 = 40\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 \cdot 4\,\text{m} = 1568\ \text{J}$$

Respecto al suelo tiene mayor energía potencial gravitatoria la segunda pesa

4. La energía cinética que va perdiendo el cuerpo se va almacenando en el muelle en forma de energía potencial elástica.

Pág. 139

1. La energía mecánica total de la cesta no se conserva, sino que aumenta. En efecto, no hay más que tener en cuenta el incremento de energía potencial gravitatoria que experimenta.

La explicación es sencilla. La cesta no constituye un sistema aislado, pues interacciona con el exterior (nosotros aplicamos una fuerza «desde fuera» para levantarla).

2. Si un cuerpo desliza por un plano inclinado sin rozamiento, su energía potencial gravitatoria disminuye (pues disminuye la altura a la que se encuentra respecto a cualquier plano horizontal de referencia). Por el contrario, aumenta su energía cinética (pues aumenta la velocidad que posee). Sin embargo, su energía mecánica total permanece constante, pues el cuerpo constituye un sistema aislado.

Si hay rozamiento entre el cuerpo y el plano, las dos primeras afirmaciones anteriores siguen cumpliéndose. Pero la energía mecánica total del cuerpo disminuye, pues parte de ella se pierde como consecuencia del rozamiento, transformándose en calor.

3. El trabajo útil realizado por el motor es:

$$W_{\text{útil}} = \Delta E_{pg} = m \cdot g \cdot h = 5\,000\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 \cdot 25\,\text{m} = 1{,}225 \cdot 10^6\ \text{J}$$

y la energía utilizada:

$$E_{\text{utilizada}} = \Delta V \cdot I \cdot t = 220\ \text{V} \cdot 5\ \text{A} \cdot 3\,600\ \text{s} = 3{,}96 \cdot 10^6\ \text{J}$$

Por lo tanto, el rendimiento del motor valdrá:

$$\eta = \frac{W_{\text{útil}}}{E_{\text{utilizada}}} \cdot 100 = \frac{1{,}225 \cdot 10^6\ \text{J}}{3{,}96 \cdot 10^6\ \text{J}} \cdot 100 = \boxed{30{,}9\ \%}$$

SOLUCIONES a las Actividades de Síntesis

1. El trabajo mecánico puede definirse como el efecto que realiza una fuerza al desplazar su punto de aplicación en cualquier dirección no perpendicular a la suya. Es una magnitud escalar definida por el producto de la fuerza efectiva que desplaza al cuerpo por el camino recorrido por su punto de aplicación.

Al mover con velocidad constante un cuerpo sobre una circunferencia en un plano horizontal no se realiza trabajo alguno, pues la fuerza aplicada (fuerza centrípeta) es en todo momento perpendicular a la trayectoria seguida por el móvil.

2. La grúa no realiza trabajo alguno, puesto que según se explicó en la respuesta a la actividad anterior, los vectores fuerza y desplazamiento son, en este caso, perpendiculares. La dirección de la fuerza es la de la vertical, y la del desplazamiento, la horizontal.

3. Las máquinas se emplean para hacer más cómoda o más fácil la realización de un trabajo. Para ello modifican aquellos factores que influyen en él, con objeto de conseguir el mismo trabajo (o menor, si hay rozamiento) con un esfuerzo menor.

4. En todos los casos, tanto el desplazamiento como la fuerza aplicada son iguales:

$$F = 10\ \text{N} \quad ; \quad s = \frac{h}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{1\ \text{m}}{\text{sen}\ 30^\circ} = 2\ \text{m}$$

- Caso 1 $(\alpha_1 = 0^\circ)$:

$$W_1 = F \cdot s \cdot cos\ \alpha_1 = 10\ \text{N} \cdot 2\ \text{m} \cdot cos\ 0^\circ = \boxed{20\ \text{J}}$$

- Caso 2 $(\alpha_2 = 30^\circ)$:

$$W_2 = F \cdot s \cdot cos\ \alpha_2 = 10\ \text{N} \cdot 2\ \text{m} \cdot cos\ 30^\circ = \boxed{17{,}32\ \text{J}}$$

- Caso 3 $(\alpha_3 = 10^\circ)$:

$$W_3 = F \cdot s \cdot cos\ \alpha_3 = 10\ \text{N} \cdot 2\ \text{m} \cdot cos\ 10^\circ = \boxed{19{,}70\ \text{J}}$$

5. Al desplazarlo con velocidad constante habrá que aplicarle una fuerza cuyo valor sea igual a la fuerza de rozamiento.

Por tanto:

$$F_{\text{aplicada}} = F_r = \mu \cdot m \cdot g = 0{,}2 \cdot 50\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m}/\text{s}^2 = 98\ \text{N}$$

El trabajo realizado será:

$$W = F \cdot s = 98\ \text{N} \cdot 10\ \text{m} = \boxed{980\ \text{J}}$$

6. El trabajo será igual al producto escalar de los vectores fuerza y desplazamiento:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \left(3\,\vec{u}_x + 4\,\vec{u}_y\right) \cdot \left(2\,\vec{u}_x + 2\,\vec{u}_y\right) = 6 + 8 = \boxed{14\ \text{J}}$$

En cuanto al ángulo que forman la fuerza y el desplazamiento, será:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{\left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right|} = \frac{14}{5 \cdot 2\sqrt{2}} = 0{,}7\sqrt{2} = 0{,}9899 \Rightarrow \boxed{\varphi = 8{,}13^\circ}$$

7. Calcularemos, en primer lugar, el trabajo útil que realiza la grúa:

$$W_{\text{útil}} = \Delta E_{pg} = m \cdot g \cdot h =$$
$$= 10^3\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m}/\text{s}^2 \cdot 15\ \text{m} = 1{,}47 \cdot 10^5\ \text{J}$$

La potencia valdrá:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1{,}47 \cdot 10^5\ \text{J}}{15\ \text{s}} = \boxed{9\ 800\ \text{W}}$$

8.
- El trabajo es negativo (trabajo pasivo o resistente) cuando el ángulo que forman las direcciones de la fuerza y del desplazamiento es mayor de 90°.
- La energía cinética nunca puede ser negativa, pues su valor es igual al producto de la masa (positiva) por el cuadrado de la velocidad (que también será positivo).
- La energía potencial gravitatoria puede ser positiva o negativa, dependiendo del nivel de referencia que se elija. Si un cuerpo está situado por encima del nivel de referencia elegido, su energía potencial gravitatoria será positiva; y negativa, en caso contrario.
- La energía potencial elástica nunca puede ser negativa, pues su valor es igual al producto de la constante elástica del resorte (positiva) por el cuadrado de la deformación que dicho resorte posee (que también será positivo).

9. La fuerza aplicada es variable con el tiempo. Por lo tanto, la aceleración también lo será:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{16t}{8} = 2t\ \text{(SI)}$$

La velocidad que adquiere el cuerpo será:

$$v = \int a \cdot dt = \int 2t\ dt = t^2 + \text{cte} = t^2$$

(ya que por estar el cuerpo inicialmente en reposo, para $t = 0$, $v = 0$).

De aquí se deduce: $ds = t^2\,dt$

Por lo tanto:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^4 16\,t \cdot t^2\ dt = \int_0^4 16\,t^3\ dt = \left[4\,t^4\right]_0^4 = \boxed{1024\ \text{J}}$$

O también, aplicando el teorema de la energía cinética, como la velocidad al cabo de 4 segundos es: $v = t^2 = 16\ \text{m/s}$, resulta:

$$W = \Delta E_C = \frac{1}{2}\,m \cdot v^2 - \frac{1}{2}\,m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2}\,m \cdot v^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\,8\ \text{kg} \cdot \left(16\ \text{m}/\text{s}\right)^2 = \boxed{1\,024\ \text{J}}$$

10. a) Energía potencial gravitatoria, por estar situada a una determinada altura.

b) Energía cinética de traslación.

c) Energía cinética de rotación.

11. Calcularemos, en primer lugar, la constante elástica del resorte por aplicación de la ley de Hooke:

$$k = \frac{E_{P_X}}{x} = \frac{5 \cdot 9{,}8\ \text{N}}{2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 2\,450\ \text{N}/\text{m}$$

Cuando el muelle se estira 5 cm, la energía potencial elástica que almacena será:

$$E_{P_X} = \frac{1}{2}\,kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\,450\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \left(0{,}05\ \text{m}\right)^2 = \boxed{3{,}06\ \text{J}}$$

12. a) El signo menos se debe a que la fuerza elástica tiene sentido contrario a la deformación del resorte.

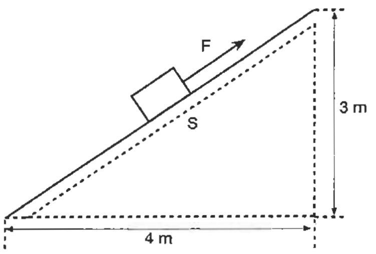
b) El valor de la constante elástica del resorte, en unidades internacionales, es:

$$k = 0{,}25\,\frac{\text{kp}}{\text{cm}}\cdot\frac{9{,}8\text{ N}}{1\text{ kp}}\cdot\frac{100\text{ cm}}{1\text{ m}} = 245\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Cuando se haya comprimido 30 cm − 23 cm = 5 cm, el resorte posee $\boxed{\textbf{energía potencial elástica}}$

$$E_{P_x} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot 245\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot(0{,}05\text{ m})^2 = \boxed{0{,}306\text{ J}}$$

13. a) Como no hay rozamiento, el trabajo realizado por la fuerza aplicada es igual a la variación de energía potencial gravitatoria del bloque:



$$W = \Delta E_{p_g} = m\cdot g\cdot h = 100\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot 3\text{ m} = \boxed{2\,940\text{ J}}$$

b) La longitud del plano inclinado se obtiene fácilmente aplicando el teorema de Pitágoras:

$$s = \sqrt{(3\text{ m})^2 + (4\text{ m})^2} = 5\text{ m}$$

Por tanto, la fuerza aplicada valdrá:

$$F = \frac{W}{s\cdot\cos\alpha} = \frac{2\,940\text{ m}}{5\text{ m}\cdot 1} = \boxed{588\text{ N}}$$

c) La ventaja de usar el plano inclinado radica en la realización de un $\boxed{\textbf{esfuerzo menor}}$.

En efecto, si quisiéramos subir el bloque verticalmente necesitaríamos aplicar una fuerza igual al peso:

$$F = P = m\cdot g = 100\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 = 980\text{ N}$$

14. El trabajo que realiza el motor del coche se invierte íntegramente en incrementar su energía potencial gravitatoria:

$$W = \Delta E_{p_g} = m\cdot g\cdot h$$

Como: $h = 4\,000\text{ m}\cdot\text{sen }5° = 4\,000\text{ m}\cdot 0{,}0872 = 348{,}6\text{ m}$, resulta que:

$$W = \Delta E_{p_g} = m\cdot g\cdot h =$$
$$= 1500\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot 348{,}6\text{ m} = \boxed{5{,}125\cdot 10^6\text{ J}}$$

15. En este caso, el trabajo realizado por la grúa se invierte en incrementar las energías cinética y potencial gravitatoria del bloque:

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}m\cdot v^2 = \frac{1}{2}\cdot 1000\text{ kg}\cdot(1\text{ m/s})^2 = 500\text{ J}$$

$$\Delta E_{p_g} = m\cdot g\cdot h = 1\,000\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot 10\text{ m} = 98\,000\text{ J}$$

Por lo tanto:

$$W = \Delta E_C + \Delta E_{p_g} = 500\text{ J} + 98\,000\text{ J} = \boxed{98\,500\text{ J}}$$

16. a) $E_{p_g} = m\cdot g\cdot h = 5\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot 200\text{ m} = \boxed{9\,800\text{ J}}$

b) De acuerdo con el principio de conservación de la energía mecánica, la energía cinética de la piedra al llegar al suelo será igual a la energía potencial gravitatoria que posee en el punto más alto:

$$\boxed{E_c = 9\,800\text{ J}}$$

c) En el punto medio del recorrido la energía mecánica de la piedra será también de 9 800 J. Como en dicho punto la energía potencial gravitatoria es:

$$E_{p_g} = m\cdot g\cdot h = 5\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot 100\text{ m} = 4\,900\text{ J}$$

la energía cinética valdrá:

$$E_C = 9\,800\text{ J} - 4\,900\text{ J} = \boxed{4\,900\text{ J}}$$

17. La energía mecánica de cada bloque no se conserva, pues cada uno de ellos no constituye un sistema aislado (en efecto, el bloque de 20 kg sube –aumenta su energía potencial– y adquiere una cierta velocidad –aumenta su energía cinética–). En cambio, sí se conserva la energía mecánica del sistema, pues todo él constituye un sistema aislado, al no haber rozamiento.

Si tomamos como nivel cero de energías potenciales gravitatorias el que corresponde a la posición inicial del sistema, la energía mecánica inicial será nula ($h = 0$; $v = 0$), mientras que cuando el bloque de 25 kg haya descendido 4 m, la energía mecánica final del sistema será:

$$E_{m_f} = 20\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot 4\text{ m} + 25\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot(-4\text{ m}) +$$
$$+\frac{1}{2}\cdot(20\text{ kg} + 25\text{ kg})\cdot v^2$$

Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, resulta:

$$0 = 20\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot 4\text{ m} + 25\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot(-4\text{ m}) +$$
$$+\frac{1}{2}\cdot(20\text{ kg} + 25\text{ kg})\cdot v^2$$

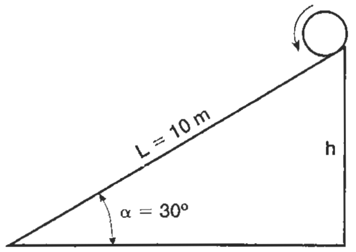
de donde:

$$\boxed{v = 2{,}95\text{ m/s}}$$

Obsérvese que, al ser nula la masa de la polea, no se considera su energía cinética de rotación; y como no existe rozamiento, es aplicable el principio de conservación de la energía mecánica.

18. La energía potencial gravitatoria del cilindro en lo alto del plano es:

$$E_{p_h} = m\,g\,h$$



Su energía cinética de traslación es:

$$E_{C_t} = \frac{1}{2}m\cdot v^2$$

y la de rotación: $E_{C_r} = \frac{1}{2}I\cdot\omega^2$

Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

El momento de inercia de un cilindro respecto a un eje que pase por el centro de sus bases es:

$$I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$$

y como, además $\omega = v/R$, sustituyendo y efectuando operaciones, se tiene:

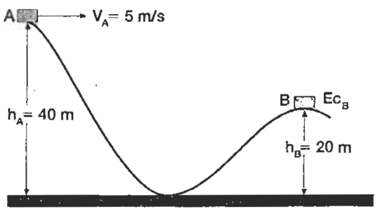
$$g \cdot h = \frac{3}{4} v^2$$

de donde:

$$v = 2\sqrt{\frac{g \cdot h}{3}} = 2\sqrt{\frac{g \cdot L \cdot \text{sen } 30°}{3}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m} \cdot 0{,}5}{3}} = \boxed{8{,}08 \text{ m/s}}$$

19. Si llamamos A a la primera cima, donde se encuentra el coche inicialmente, y B a la segunda, tal como se esquematiza en la figura, y aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica en ambos puntos, tenemos:



$$E_{P_A} + E_{C_A} = E_{P_B} + E_{C_B}$$

de donde:

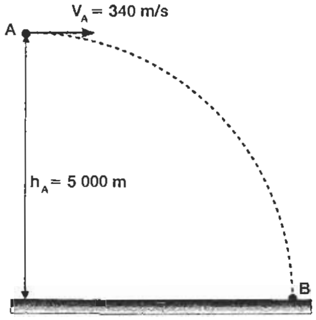
$$E_{C_B} = E_{P_A} + E_{C_A} - E_{P_B} = m \cdot g(h_A - h_B) + \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 =$$

$$= 1\,000 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot (40 - 20) \text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 1\,000 \text{ kg} \cdot (5 \text{ m/s})^2 =$$

$$= \boxed{208\,500 \text{ J}}$$

20. En cada uno de los sucesivos botes la pelota va perdiendo energía mecánica, que se invierte en trabajo de deformación. Por lo tanto, la energía mecánica de la pelota no se conserva, lo cual es lógico pues no se trata de un sistema aislado, sino que interacciona con el suelo en cada uno de los choques.

21. Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica a los puntos A y B, tenemos:



$$E_{m_A} = E_{m_B}$$

Como

$$E_{m_A} = m \cdot g \cdot h_A + \frac{1}{2} m \cdot v_A^2$$

y $\quad E_{m_B} = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2$

sustituyendo en la expresión anterior, resulta:

$$m \cdot g \cdot h_A + \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2$$

de donde:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2g \cdot h_A} =$$

$$= \sqrt{(340 \text{ m/s})^2 + 2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 5\,000 \text{ m}} = \boxed{462{,}2 \text{ m/s}}$$

22. En el transcurso del proceso el bloque de 8 kg experimenta una disminución de energía potencial gravitatoria de:

$$-E_{pg} = m_2 \cdot g \cdot h = 8 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 4 \text{ m} = 313{,}6 \text{ J}$$

Parte de esta energía se emplea en vencer el rozamiento:

$$W_r = \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot s = 0{,}25 \cdot 10 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 4 \text{ m} = 98 \text{ J}$$

y el resto (313,6 J − 98 J = 215,6 J) se invierte en energía cinética del sistema formado por los dos bloques:

Por lo tanto: $\quad 215{,}6 \text{ J} = \frac{1}{2} \cdot (10 \text{ kg} - 8 \text{ kg}) \cdot v^2$

De aquí resulta: $\quad \boxed{v = 4{,}9 \text{ m/s}}$

23. En el caso del cuerpo que cae deslizando se cumplirá que:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \qquad [1]$$

de donde: $v^2 = 2\, g \cdot h$

En el caso del que cae rodando se verifica:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v'^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} m \cdot v'^2 - \frac{1}{2} I \cdot \frac{v'^2}{R^2}$$

Efectuando operaciones:

$$2\, m \cdot g \cdot h \cdot R^2 = m \cdot R^2 \cdot v'^2 - I \cdot v'^2 = (m \cdot R^2 + I) \cdot v'^2$$

de donde:

$$v'^2 = \frac{2\, m \cdot g \cdot h \cdot R^2}{m \cdot R^2 + I} = 2\, g \cdot h \cdot \frac{m \cdot R^2}{m \cdot R^2 + I} \qquad [2]$$

Comparando las expresiones (1) y (2), se deduce que v es mayor que v', por tanto, el tiempo que tarda el primer cuerpo en descender es menor que el tiempo t' que tardaría el segundo.

El cuerpo que desliza sin rodar llega antes al suelo que el que rueda sin deslizar

24. Apliquemos el teorema de conservación de la energía mecánica a ambos bloques, entre un punto situado en lo alto del plano y otro en la base del mismo (suponemos, evidentemente, que no existe rozamiento):

Para el primer bloque: $Mgh + \frac{1}{2} M \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} M \cdot v^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2\, gh$

y para el segundo: $2\, Mgh + \frac{1}{2} \cdot 2\, M \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\, M \cdot v'^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow v'^2 = v_0^2 + 2\, gh$

Como v′ = v, ambos llegan al punto inferior **con la misma velocidad.**

25. a) Al comunicar la velocidad v_0 al bloque A, éste inicia su descenso. Calculemos la velocidad con que lo hace, aplicando las ecuaciones de la Mecánica a los bloques A y B.

Para el bloque A:

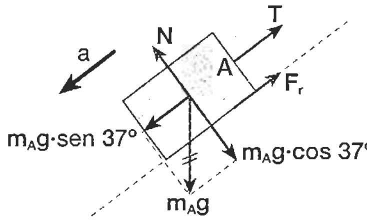
$$\sum F_t = m_A \cdot a \Rightarrow m_A\, g \cdot sen\ 37° - T - F_r = m_A \cdot a \qquad [1]$$

$$\sum F_n = 0 \Rightarrow N - m_A\, g \cdot cos\ 37° = 0 \Rightarrow N = m_A\, g \cdot cos\ 37°$$

Por otra parte: $F_r = \mu \cdot N = \mu \cdot m_A\, g \cdot cos\ 37° \qquad [2]$

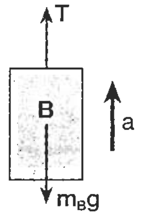
Sustituyendo la expresión [2] en la [1], resulta:

$$m_A g \cdot sen\ 37^\circ - T - \mu \cdot m_A g \cdot cos\ 37^\circ = m_A \cdot a \qquad [3]$$



Para el bloque B: $\sum F_y = m_B \cdot a \Rightarrow T - m_B\, g = m_B \cdot a \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = m_B\, g + m_B \cdot a \qquad [4]$$



Sustituyendo la expresión [4] en la [3]:

$$(m_A \cdot sen\ 37^\circ - m_B - \mu \cdot m_A \cdot cos\ 37^\circ) \cdot g = (m_A + m_B) \cdot a$$

Como $m_A = m_B = m$, resulta: $(sen\ 37^\circ - 1 - \mu \cdot cos\ 37^\circ) \cdot g = 2a$

de donde: $a = \dfrac{sen\ 37^\circ - 1 - \mu \cdot cos\ 37^\circ}{2} \cdot g =$

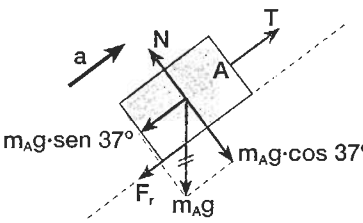
$$= \frac{0{,}6 - 1 - 3/4 \cdot 0{,}8}{2} \cdot g = -\frac{g}{2} = -5 \text{ m/s}^2$$

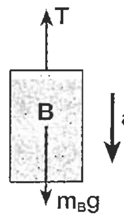
Al ser la aceleración de descenso negativa, el sistema terminará parándose. Calculemos el tiempo que invierte en ello:

$$v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 10\ m/s}{-5\ m/s^2} = 2 \text{ s}$$

¿Qué sucederá al cabo de estos 2 segundos? ¿Comenzará el cuerpo a moverse en sentido contrario, o permanecerá en reposo?

Calculemos la posible aceleración, en caso de que se moviese en sentido contrario. Procediendo de forma análoga al caso anterior, tendremos:





$$a = \frac{1 - sen\ 37^\circ - \mu \cdot cos\ 37^\circ}{2} \cdot g = \frac{1 - 0{,}6 - 3/4 \cdot 0{,}8}{2} \cdot g = -0{,}1 \text{ g}$$

Luego, al cabo de 2 segundos el sistema permanecerá en reposo. El espacio recorrido por cada uno de los dos bloques en esos 2 segundos será:

$$s = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 10\ \frac{m}{s} \cdot 2 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot \left(-5\ \frac{m}{s^2}\right) \cdot$$

$$\cdot (2\ s)^2 = 10 \text{ m}$$

El bloque A habrá bajado: $h_A = 10 \text{ m} \cdot sen\ 37^\circ = \boxed{6 \text{ m}}$,

y el bloque B habrá subido: $\boxed{h_B = 10 \text{ m}}$

b) Al cabo de 15 segundos el sistema se encuentra en reposo. Luego:

$$T = m_B g = 0{,}5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = \boxed{5 \text{ N}}$$

c) Considerando la posición inicial de los bloques como nivel cero para la energía potencial gravitatoria, tendremos:

$$E_m(\text{inicial}) \begin{cases} E_c = \frac{1}{2} \cdot (m_A + m_B) \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\, kg \cdot (10\ m/s)^2 = 50 \text{ J} \\ E_{p_g}(A) = 0 \\ E_{p_g}(B) = 0 \end{cases} E_m(\text{inicial}) = 50 \text{ J}$$

$$E_m\ (\text{final}) \begin{cases} E_C = 0 \\ E_{p_g}(A) = m \cdot g \cdot h_A = 0{,}5 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (-6 \text{ m}) = -30 \text{ J} \\ E_{p_g}(B) = m \cdot g \cdot h_B = 0{,}5 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} = 50 \text{ J} \end{cases} E_m\ (\text{final}) = 20 \text{ J}$$

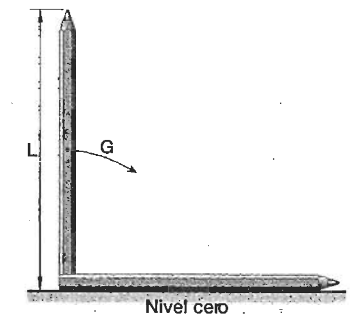
Por tanto: $\boxed{\mathbf{E_m\ (inicial) - E_m\ (final) = -E_m = 30\ J}}$

Este resultado es lógico, ya que corresponde, en valor absoluto, al trabajo de rozamiento:

$$W_r = \mu \cdot m_A\, g \cdot cos\, 37^\circ \cdot s = \frac{3}{4} \cdot 0{,}5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}8 \cdot 10 \text{ m} =$$

$$= \boxed{30 \text{ J}}$$

26. El bolígrafo pierde energía potencial gravitatoria, que se convierte en energía cinética de rotación. Aplicando el teorema de conservación de la energía mecánica, y suponiendo que la masa total del bolígrafo se halla concentrada en su centro de gravedad (punto medio), se tiene que:



$$m\, g\, h = m\, g\, \frac{L}{2} = \mathrm{I} \cdot \omega^2$$

Como el momento de inercia del bolígrafo (varilla homogénea) respecto a un eje perpendicular a él y que pasa por su extremo es: $\mathrm{I} = \frac{1}{3} m \cdot L^2$

la expresión anterior se convierte en:

$$m \cdot g \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m \cdot L^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{6} m \cdot L^2 \cdot \omega^2$$

De aquí resulta:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{0{,}15 \text{ m}}} = \boxed{14 \text{ rad/s}}$$